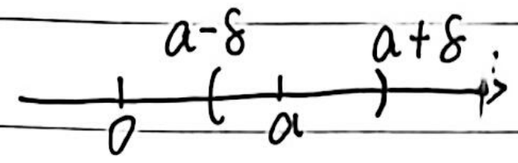
Date

1. N - 自然数集
   Z - 整数集
   Q - 有理数集
   R - 实数集
   $\Big\}$ $N \subset Z \subset Q \subset R$

2. 

$\delta > 0$ $U(a,\delta) = (a-\delta, a+\delta)$

邻域 $= \{x \mid a-\delta < x < a+\delta\}$

3. $|x+y| \le |x| + |y|$

$|x-y| \ge |x| - |y|$ $\quad |x-y| + |y| \ge |x| = |(x-y)+y|$

$||x|-|y|| \le |x-y|$ $\quad |x-y| \ge -(|x|-|y|) = |y|-|x|$

4. 若数列 $\{x_n\}$ 收敛，那么它的极限唯一.

若数列 $\{x_n\}$ 收敛，那么数列 $\{x_n\}$ 一定有界 无界数列必定发散

若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 且 $a>0$ (或 $a<0$)，那么存在正整数 N，当 $n>N$ 时，都有 $x_n > 0$ (或 $x_n < 0$)

若数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，那么它的任一子数列也收敛，且极限也是 a

E 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n} = 1$.

要证 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N = \left[\frac{|a|}{\sqrt{\varepsilon}}\right] + 1$.

当 $n > N$ 时，有 $\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}-n}{n}\right| < \varepsilon$

$$\Downarrow$$

$$\frac{a^2}{n\left(\sqrt{n^2+a^2}+n\right)} \le \frac{a^2}{n^2} < \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$n > \frac{|a|}{\sqrt{\varepsilon}}$$

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

Date

证明 $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$，其中 $|q|<1$.

① $q=0$ 成立

② $q\neq 0$. 要证 $\forall \varepsilon>0$，$\exists N = [\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}] + 1$

当 $n>N$ 时，$|q|^n < \varepsilon$

$n\ln|q| < \ln\varepsilon$

$\downarrow$

$n > \frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$

对于数列 $\{x_n\}$，若 $x_{2k-1}\to a\ (k\to\infty)$，$x_{2k}\to a\ (k\to\infty)$，

证明 $x_n \to a\ (n\to\infty)$

$x_{2k}\to a\ (k\to\infty)$ $\Rightarrow$ $\forall \varepsilon>0$，$\exists k_1\in N$

当 $k>k_1$ 时，$|x_{2k}-a|<\varepsilon$

$x_{2k+1}\to a\ (k\to\infty)$ $\Rightarrow$ 对上述任取的 $\varepsilon>0$，$\exists k_2\in N$

当 $k>k_2$ 时，$|x_{2k+1}-a|<\varepsilon$

取 $N = \max\{2k_1, 2k_2+1\}$

当 $n>N$ 时，$|x_n - a|<\varepsilon$

证明：$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4} = \frac{1}{4}$

$\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta = \min\{12\varepsilon, 1\}$

当 $0<|x-2|<\delta$ 时，有 $|\frac{x-2}{x^2-4} - \frac{1}{4}|<\varepsilon$

设 $1\le x\le 3$，$\frac{|x-2|}{4|x+2|} \le \frac{|x-2|}{4\times 3} = \frac{1}{12}|x-2| < \varepsilon$.

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = A$.

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

证

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在, 那么这极限唯一

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. 那么存在常数 $M > 0$ 和 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x)| \le M$

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. 且 $A > 0$ (或 $A < 0$), 那么存在常数 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $f(x) > 0$ (或 $f(x) < 0$)

证明 当 $x_0 > 0$ 时, $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$

$$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} < \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}} < \varepsilon$$

$\therefore |x - x_0| < \sqrt{x_0}\varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \min\{x_0, \sqrt{x_0}\varepsilon\}$.

证明 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+1}{2x-1} = \frac{1}{2}$

$$\left|\frac{x+1}{2x-1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{(2x+2) - (2x-1)}{4x-2}\right| = \left|\frac{3}{4x-2}\right| < \varepsilon.$$

$\therefore 4x - 2 > \frac{3}{\varepsilon}$

$$x > \frac{\frac{3}{\varepsilon} + 2}{4} = \frac{3}{4\varepsilon} + \frac{1}{2}.$$

证明 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists X = \max\left\{\frac{3}{4\varepsilon}, 1\right\}$, 当 $|x| > X$ 时, $\frac{3}{2}\left|\frac{1}{2x-1}\right| \le \frac{3}{2}\frac{1}{|x|} < \varepsilon$ $(|x| \ge 1)$

$(|2x-1| \ge 2|x| - 1 \ge |x|, \quad |x| \ge 1)$.

$|x| > \frac{3}{2\varepsilon}$

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1})$

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

Date

常用等价无穷小

当 $x \to 0$ 时

$\sin x \sim x$　　$\tan x \sim x$　　$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$　　$\ln(1+x) \sim x$

$\arcsin x \sim x$　　$\arctan x \sim x$　　$\sqrt[n]{1+x}-1 \sim \frac{1}{n}x$　　$e^x-1 \sim x$

两个无穷小的和是无穷小　　有限个无穷小之和也是无穷小

有界函数与无穷小的乘积是无穷小

常数与无穷小的乘积是无穷小

有限个无穷小的乘积是无穷小.

如果 $\lim f(x)=A$, $\lim g(x)=B$, 那么.

① $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$

② $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$.

③ 若又有 $B\neq 0$ 则 $\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\frac{A}{B}$.

如果 $\lim f(x)$ 存在. 而 c 为常数. 那么 $\lim[cf(x)]=c\lim f(x)$

如果 $\lim f(x)$ 存在, 而 n 是正整数. 那么 $\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n$.

设有数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$. $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$.

那么. ① $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=A\pm B$.

② $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=A\cdot B$.

③ 当 $y_n\neq 0$ $(n=1,2,3\cdots)$ 且 $B\neq 0$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{A}{B}$

如果 $\varphi(x)\geq\psi(x)$. 而 $\lim\varphi(x)=A$. $\lim\psi(x)=B$, 那么 $A\geq B$

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. 及 $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$

若 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$. 那么 β 是比 α 高阶的无穷小 记作 $\beta=o(\alpha)$

若 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=\infty$. 那么 β 是比 α 低阶的无穷小.

若 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=c\neq 0$. 那么 β 与 α 是同阶无穷小

若 $\lim\frac{\beta}{\alpha^k}=c\neq 0$, $k>0$. 那么 β 是关于 α 的 k 阶无穷小

若 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=1$. 那么 β 与 α 是等价无穷小. 记为作 $\alpha\sim\beta$

β 与 α 是等价无穷小的充分必要条件为 $\beta=\alpha+o(\alpha)$

设 $\alpha\sim\tilde{\alpha}$, $\beta\sim\tilde{\beta}$, 且 $\lim\frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}}$ 存在. 则 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}}$

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义. 如果 $\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$.

那么就称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 连续

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义. 如果 $\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

那么就称函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

间断点 {第一类 {可去 左右极限存在且相等. 但不等于函数值
跳跃 左右极限存在但不相等.
第二类 {无穷 极限为无穷.
振荡 极限不存在且非无穷 (eg: $\sin\frac{1}{x}$ 在 $x=0$)

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

Date

$\sec x = \frac{1}{\cos x}$

$\cot x = \frac{1}{\tan x}$

$\csc x = \frac{1}{\sin x}$

$(u \pm v)' = u' \pm v'$

$(Cu)' = Cu'$ (C是常数)

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ $(v \neq 0)$

$(C)' = 0$

$(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\tan x)' = \sec^2 x$

$(\cot x)' = -\csc^2 x$

$(\sec x)' = \sec x \tan x$

$(\csc x)' = -\csc x \cot x$

$(a^x)' = a^x \ln a$ $(a > 0$ 且 $a \neq 1)$

$(e^x)' = e^x$

$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ $(a > 0$ 且 $a \neq 1)$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$(\operatorname{arcsin} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(y)}$

$(\operatorname{arcsinh} x)' = \frac{1}{(\sinh y)'} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$x = \sinh y$

Campus

CS 扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

求摆线 $\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$ 在 $t=\frac{\pi}{2}$ 处的切线方程.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y_t}{x_t} = \frac{a\cdot \sin t}{a\cdot(1-\cos t)}$$

$$= 1 = k$$

把 $t=\frac{\pi}{2}$ 代入 $x = a(t-\sin t)$, $x = a\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$

$y = a(1-\cos t)$ $y = a(1-0) = a$

$y - a = k\left[x - a\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\right]$

$y = x - \frac{\pi}{2}a + 2a$

$= x + a\left(2-\frac{\pi}{2}\right)$.

设 $\begin{cases} x = \sqrt{1+t} \\ y = \sqrt{1-t} \end{cases}$ 证明 $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{y^3}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y_t}{x_t} = \frac{-\frac{1}{2}(1-t)^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(1+t)^{-\frac{1}{2}}} = \frac{-\sqrt{1+t}}{\sqrt{1-t}} = \frac{-x}{y}.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-\frac{1}{2}(1+t)^{-\frac{1}{2}}\sqrt{1-t} + \sqrt{1+t}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\sqrt{1-t}^{-\frac{1}{2}}}{1-t} = \frac{-y+x\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2}$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{\frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}} + \frac{\sqrt{1+t}}{\sqrt{1-t}}}{1-t}\right] = -\frac{y^2+x^2}{y^3} = -\frac{y+\frac{x^2}{y}}{y^2}$$

$$= -\frac{2}{y^3}.$$

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{x}{y}\right) = -\frac{y - xy'_x}{y^2}$$

$$= -\frac{y - x\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2}$$

$$= -\frac{y + \frac{x^2}{y}}{y^2}$$

$$= -\frac{y^2 + x^2}{y^3}$$

$$= -\frac{2}{y^3}.$$

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

$$[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x)$$

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} \quad (v(x) \neq 0)$$

$$(u \pm v)' = u' + v'$$

$$(Cu)' = Cu' \quad (C\text{是常数})$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0)$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}.$$

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

$$(x^n)^k = \begin{cases} n! & (k=n) \\ 0 & (k>n) \end{cases}$$

$$(f(x)g(x))^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f(x)^k g(x)^{(n-k)}$$

$$(f(x)+g(x))^n = f(x)^n + g(x)^n.$$

$$(a^x)^n = a^x \ln^n a \quad (a>0)$$

$$(e^x)^n = e^x$$

$$(\sin kx)^n = k^n \sin\left(kx + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

$$(\cos kx)^n = k^n \cos\left(kx + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

$$(x^\alpha)^n = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}.$$

$$(\ln x)^n = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$$

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)^n = (-1)^n \frac{n!}{}$$

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

Date . .

近似公式

$\sqrt[n]{1+x} \approx 1+\frac{1}{n}x$

$\sin x \approx x$ (x为弧度)

$\tan x \approx x$

$e^x \approx 1+x$

$\ln(1+x) \approx x$

罗尔

Rolle定理.

若$f(x)$满足 (1) 在闭区间$[a,b]$上连续

(2) 在开区间(a,b)内可导

(3) 在区间端点处的函数值相等 $f(a)=f(b)$

则在(a,b)内至少存在一点ξ $(a<\xi<b)$，使得$f'(\xi)=0$

拉格朗日中值定理

若$f(x)$满足 (1) 在闭区间$[a,b]$上连续

(2) 在开区间(a,b)内可导

则在(a,b)内至少存在一点ξ $(a<\xi<b)$使得$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$

柯西中值定理

若$f(x)$及$F(x)$满足 (1) 在闭区间$[a,b]$上连续

(2) 在开区间(a,b)内可导

(3) 对任一$x\in(a,b)$，$F'(x)\neq 0$.

则在(a,b)内至少存在一点ξ，使 $\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

洛必达法则

一、$\frac{0}{0}$型未定式

设 (1). 若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ 且 $\lim\limits_{x\to a} F(x)=0$.

(2) 在 a 的某去心邻域内，$f'(x)$ 与 $F'(x)$ 都存在且 $F'(x)\neq 0$.

(3) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在或为无穷大

则 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$

设 (1) 当 $x\to\infty$ 时，~~函数 $f(x)$~~ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$ 且 $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)=0$

(2) 当 $|x|>X$ 时，$f'(x)$ 与 $F'(x)$ 都存在且 $F'(x)\neq 0$.

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在或为无穷大.

则 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{F'(x)}$.

二、$\frac{\infty}{\infty}$型未定式

如果 (1). $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$，且 $\lim\limits_{x\to a} F(x)=\infty$.

(2) 在 a 的某去心邻域内，$f(x)$ 与 $F'(x)$ 都存在且 $F'(x)\neq 0$.

(3) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在或为无穷大

则 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

Date . .

泰勒中值定理.

设 $f(x)$ 在 (a,b) 内具有直到 $(n+1)$ 阶的导数，$x_0 \in (a,b)$，则 $\forall x \in (a,b)$ 有：

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)$$

其中 $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ （ξ 在 x 与 x_0 之间）

或 $o((x-x_0)^n)$

常用函数的麦克劳林公式

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

可导性与连续性：

可导必然连续。（充分）

连续不一定可导（不充分）。

连续性检验：函数在某点的极限值等于该点的函数值。

可导性检验：导数定义式的极限存在。

可导 <=> 可微。

幂指函数求导：$y = x^{\cos x^2}$

$x = e^{\ln x} \rightarrow$ 得 $y = e^{\ln x \cdot \cos x^2}$

参数方程求导：一阶：$\frac{(dy)'}{(dx)'}$

二阶：$\frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)'}{(dx)'}$

$\lim f(x)^{g(x)} = e^{\lim (f(x)-1)g(x)}$ 底数→1. 指数→∞

$\lim f(x)^{g(x)} = e^{\lim g(x)\cdot \ln f(x)}$ 底数→0, 指数→0.

$\lim f(x)^{g(x)} = e^{\lim g(x)\ln f(x)}$. 底数→∞, 指数→0.

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

Date

$\log_a M + \log_a N = \log_a MN$ $\log_a M - \log_a N = \log_a \frac{M}{N}$

$\log_a M^n = n \log_a M$

$\log_a \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n} \log_a M$

$a^{\log_a M} = M$

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ $\tan\frac{t}{2} = \frac{\sin t}{1+\cos t}$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$

$1 + \sin\alpha = \sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \left(\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\right)^2$

$1 - \sin\alpha = \left(\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}\right)^2$

$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$

$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

Date

$2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$

$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)$

$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$.

$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

$\cos x + \cos y = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$

$= 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$

$\cos x - \cos y = 2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

Campus

CS 扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

$\sin x \sim x$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

$\tan x \sim x$

$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$.

$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$.

$\ln(1+x)\sim x$

一 { 可去 左右极限存在相等.
跳跃 不相等.

$\arcsin x \sim x$

$\arctan x \sim x$

二 { 无穷：极限∞
振荡：极限不存在且非∞

$\sqrt{1+x}-1 \sim \frac{1}{n}x$

$e^x-1 \sim x$

$a^x-1 \sim x\ln a$.

$(\tan x)' = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

$(\cot x)' = -\csc^2 x = -\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x}$

$(\sec x)' = \sec x\tan x$

$(\csc x)' = -\csc x\cot x$

$(a^x)' = a^x \ln a \quad (a>0 \text{ 且 } a\neq 1)$.

$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a} \quad (a>0 \text{ 且 } a\neq 1)$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

$[f(x)g(x)]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f(x)^{(k)} g(x)^{(n-k)}$

$[f(x)+g(x)]^{(n)} = f(x)^{(n)} + g(x)^{(n)}$

$(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a \quad (a>0)$

$(e^x)^{(n)} = e^x$

$(\sin kx)^{(n)} = k^n \sin(kx + n\frac{\pi}{2})$

$(\cos kx)^{(n)} = k^n \cos(kx + n\cdot\frac{\pi}{2})$

$(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$

$(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$

$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$

$(\frac{1}{x})^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

$$\sqrt[n]{1+x} \approx 1+\frac{x}{n}$$

$$\sin x \approx x$$

$$\tan x \approx x$$

$$e^x \approx 1+x$$

$$\ln(1+x) \approx x$$

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{1}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C$$

$$\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C$$

$$\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int \cot x\,dx = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

$$\int \csc x\,dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$$

CS 扫描全能王
3亿人都在用的扫描App

Date

设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内具有一阶和二阶导数.

(1)若在(a,b)内 $f''(x)>0$. 则 $f(x)$在$[a,b]$上的图形是凹的

(2)若在(a,b)内 $f''(x)<0$，则 $f(x)$在$[a,b]$上的图形是凸的.

若在区间 I 上. 可导函数 $F(x)$ 的导函数为 $f(x)$. 即对任一 $x\in I$. 都有

$$F'(x)=f(x). \quad 或\ dF(x)=f(x)dx$$

$$\int f(x)dx = F(x)+C$$

eg: 求 $\int x^2dx$ $\qquad \left(\frac{x^3}{3}\right)'=x^2$

$$\therefore \int x^2dx = \frac{x^3}{3}+C$$

基本积分表.

$$\int kdx = kx+C \quad (k是常数)$$

$$\int x^\mu dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+C \quad (\mu\neq -1)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x|+C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x+C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x+C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x+C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x+C$$

$$\int e^x dx = e^x+C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+C \quad (a>0且a\neq 1)$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x\,dx = \tan x+C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x\,dx = -\cot x+C$$

$$\int \sec x\tan x\,dx = \sec x+C$$

$$\int \csc x\cot x\,dx = -\csc x+C$$

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

$$\int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$$

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\,dx = \left[\int f(u)\,du\right]_{u=\varphi(x)}.$$

$$\int f(x)\,dx = \left[\int f[\psi(t)]\psi'(t)\,dt\right]_{t=\psi^{-1}(x)}$$

$\psi^{-1}(x)$ 是 $x=\psi(t)$ 的反函数.

$(uv)' = u'v + uv' \longrightarrow uv' = (uv)' - u'v$

$$\int uv'\,dx = uv - \int u'v\,dx$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$\int f(x, \sqrt[n]{ax+b})\,dx$ 令 $t = \sqrt[n]{ax+b}$.

$\int f(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})\,dx$ 令 $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$

$\int f(x, \sqrt{a^2-x^2})\,dx$ 令 $x = a\sin t$ 或 $x = a\cos t$

$\int f(x, \sqrt{a^2+x^2})\,dx$ 令 $x = a\tan t$ 或 $x = a\sh t$

$\int f(x, \sqrt{x^2-a^2})\,dx$ 令 $x = a\sec t$.

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

Date

定积分 $\int_a^b f(x)\,dx = I$ 为函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分.

$$\int_a^b f(x)\,dx = I = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$$

$f(x)$ 叫被积函数 $f(x)dx$ 叫被积表达式 x 叫积分变量

a 叫积分下限 b 叫积分上限 $[a,b]$ 叫积分区间.

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续 那么积分上限的函数 $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

在 $[a,b]$ 上可导 并且其导数为 $\Phi'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$ $(a \le x \le b)$

$\frac{d}{dx}\int_a^{\varphi(x)} f(t)\,dt$ → 导数: $f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$ 、

若 $F(x)$ 在 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数

则 $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$.

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续 $\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$ $\xi \in [a,b]$

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

换元公式

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$x=\varphi(t)$ 满足 (1) $\varphi(\alpha)=a$，$\varphi(\beta)=b$

(2) $\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$（或 $[\beta,\alpha]$）上具有连续函数，且值域 $R_\varphi=[a,b]$

则有 $\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt$

分部积分公式

$$\int_a^b u\,dv=[uv]_a^b-\int_a^b v\,du$$

反常积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx=\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx=\lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^0 f(x)dx+\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$$

$$=[F(x)]_{-\infty}^{+\infty}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\,dx$$

$$=\lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\,dx$$

$$=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)dx$$

Campus

CS 扫描全能王 3亿人都在用的扫描App