用施密特正交化解决基变换的问题

No.

Date

1、已知α_1，求$\alpha_2\alpha_3$，使其为正交向量组.

1、设X，使$\alpha_1^T X=0$

2、求出基础解系

3、将基础解系正交化

⇒ α_1与X正交
↓ 解出的ξ_1 ξ_2没有正交
↓ 正交化，两两正交.

2、求 $\alpha_1\cdots\alpha_s$下坐标下的 β向量的坐标.（正交化后，坐标也改变了）

i 将$\alpha_1\cdots\alpha_s$正交单位化后

ii $((\beta,\alpha_1),\cdots(\beta,\alpha_s))^T$. 为其在这个基下的坐标.

3、正交矩阵的充要条件 { 行/列向量组两两正交、并且是单位向量
$A^T\cdot A=E$.

4、实对称矩阵的正交相似对角化

1、求特征值

2、求特征值对应的特征向量. } 只在λ的重根里找、不同特征值的向量一定正交.

3、将特征向量正交化

★若已知矩阵是 $P^{-1}AP=\Lambda$ 中P满足了相似/正交条件. 只需要完成对角化即可.

5、将二次型化为矩阵. { 平方项系数直接作为主对角元
交叉项系数除以2. 放在两个对应的位置上.

6、将二次型化为标准形/规范型.

1、写出矩阵A

2、将A进行实对称矩阵的正交相似对角化，求出其正交矩阵Q [这里也要单位化]

3、令 $x=Qy$、

$f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$ [顺序与构成正交矩阵的顺序一致]

n阶实对称矩阵. ⟺ A为正定矩阵. 特征值均大于0.

7. 判断二次型的正定性

判断各顺序主子式是否大于0、 ⟹ 正定.

奇数阶 主子式<0. 偶数阶主子式>0

性质：

1、相似：$|A|=|B|$.

特征多项式与特征值相同 | 对角线之和为特征值之和
特征值之积与行列式相等 .

2、A与Λ 相似，对角矩阵上的λ_1 — λ_n为A的n个特征值.

n阶方阵与对角矩阵相似.

条件. 有n个线性无关的特征向量.
有n个互不相同的特征值.
对于每个n_i重特征值存在n_i个线性无关的特征向量.
即 $n-R(A-\lambda_i E)=n_i$ $R(A-\lambda_i E)=n-n_i$.

3、正交矩阵性质

$|A|=1$ 或 -1.

$A^{-1}=A^T$ 为正交矩.

4、实对称矩阵：$A^T=A$

特征值都是实数

不同特征值下的向量正交.

课本书P100页 例2.

$\gamma_1=\alpha$

$\gamma_2=\alpha_3$

$\gamma_3=0$

No.

Date

1. 求解特征值与特征向量

i 特征值. $|A-\lambda E|=0$

三阶方阵时. 优先用 行/列 的 0 元素 降阶 [划成三角、按行展开]

$A^2=E$ 、特征值只能是1或-1.

ii 特征向量

将求得特征值代入 ,得 矩阵.

与作解矩阵 所构建方程的同解方程组

解出的解 $c_1\xi_1+c_2\xi_2$ 为对应的特征向量 (有可能有很多个)

2. 求A^{100}

将 $A\cdot A^{-1}$ 组合到一起.

3. 判断是否可以对角化 :

n个特征值

n个线性无关的特征向量 (求出n个基础解系)

$n-R(A-\lambda_i E)=n_i$. [对于每一重根来说]

4. 求解可逆矩阵P ,对角矩阵Λ

$P(\xi_1\ \xi_2\cdots\xi_n)$ 基础解系, $\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}$ 构成对应的对角矩阵.

有重数 $\lambda_1=\lambda_2$ 填入一样的值.

5. 将线性无关组 化为正交向量组.

$\beta_1=\alpha_1$

$\beta_2=\alpha_2-\dfrac{(\beta_1\ \alpha_2)}{(\beta_1\ \beta_1)}\beta_1$

$\beta_3=\alpha_3-\dfrac{(\beta_1\ \alpha_3)}{(\beta_1\ \beta_1)}\beta_1-\dfrac{(\beta_2,\alpha_3)}{(\beta_2\ \beta_2)}\beta_2.$

$\beta_1=\alpha_1$

$\beta_2=\alpha_2-\dfrac{(\beta_1\alpha_1)}{\|\beta_1\|^2}\beta_1$

$\beta_3=\alpha_3-\dfrac{(\beta_1\alpha_3)}{\|\beta_1\|^2}\beta_1-\dfrac{(\beta_2\alpha_3)}{\|\beta_2\|^2}\beta_2.$

线性代数题型

1、求极大线性无关组

2、求过渡矩阵　　　　按列构成矩阵 $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)P$.

向量在对应基下的坐标 P100　　　坐标变换公式. $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ 原=P新

按列构成对应坐标

3、判断线性方程组是否有解. $r(A)=r(\bar{A})$ 有解. | $r(A)=r(\bar{A})<$维数 无穷多解
$r(A)=r(\bar{A})=$维数 唯一解.

$r(A)\neq r(\bar{A})$ 无解.

4、判断线性齐次方程组（求解）.

$r(A)=n$. 仅有0解 . 满秩 $|A|\neq0$

$r(A)<n$ 有无数个非零解. 不满秩 $|A|=0$.

5. 求基础解系.　　构造矩阵 ⇒ 行简化阶梯形［只有首非零元是1］
⇒ 其它项的系数分别为1.

表示 $x=c_1\xi_1+c_2\xi_2$　　c_1c_2为任意常数

6、基础解系中有几个向量（处于线性齐次方程组）.

当没有满秩时. 基础解系中有 $n-r(A)$ 个向量.

7、求解非线性齐次方程组的解.

① 构造增广矩阵

② 特解：增广矩阵右侧的常数部分 }
③ 通解：右边系数部分第基础解系 } 均为已化简后的增广矩.