No.

Date

1. 二阶行列式的计算

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

2. 三角形行列式的计算.

(1) $\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & c \end{vmatrix} = ac$

(2) $\begin{vmatrix} a & 0 \\ b & c \end{vmatrix} = ac$

(3) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3$

(4) $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3.$

eg: 求三阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

① 行列式的倍加性质：行列式的某行(或列)的k倍加到另一行(或列)，行列式的值不变

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 - 3r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$$

② 行列式中某一行(或列)的所有元素的公因子可以提到行列式外面.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

③ 交换行列式的两行(或列)，行列式的值变号，

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 + 2r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 6 & -7 \\ -3 & 4 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3 + 3r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 6 & -7 \\ 0 & 10 & -10 \end{vmatrix} = 10\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 6 & -7 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_3} -10\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3 - 6r_2} -10\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-10)(-1) = 10.$$

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

eg: 利用性质计算 $D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$

$$D \overset{c_1 \leftrightarrow c_2}{=\!=} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_2-r_1 \\ r_4+5r_1}}{=\!=} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix} \overset{r_2 \leftrightarrow r_3}{=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_3+4r_2 \\ r_4-8r_2}}{=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & 15 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} \overset{r_4+\frac{1}{2}r_3}{=\!=} 10 \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 10 \times 1 \times 2 \times 4 \times \frac{1}{2}$$

$$= 40$$

eg: 计算三阶行列式 $D=\begin{vmatrix} x & a & a \\ a & x & a \\ a & a & x \end{vmatrix}$

每行元素之和相等. — 把2.3列均加到第一列. 再提公因子.

$$D \overset{c_1+c_2+c_3}{=\!=} \begin{vmatrix} x+2a & a & a \\ x+2a & x & a \\ x+2a & a & x \end{vmatrix} = (x+2a) \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 1 & x & a \\ 1 & a & x \end{vmatrix} \overset{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-r_1}}{=\!=} (x+2a) \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 0 & x-a & 0 \\ 0 & 0 & x-a \end{vmatrix}$$

$$= (x+2a)(x-a)^2$$

3. 范德蒙行列式的计算.

(1) $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix}$

特点: 1. 第1行(列)元素全为1

2. 每1列(行)元素均为等比数列, 且公比元素在第二行(列)

3. 其结果为[公比元素作差再相乘]

$$D \overset{\substack{c_2-c_1 \\ c_3-c_1}}{=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ x_1^2 & x_2^2-x_1^2 & x_3^2-x_1^2 \end{vmatrix} = (x_2-x_1)(x_3-x_1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_1 & 1 & 1 \\ x_1^2 & x_2+x_1 & x_3+x_1 \end{vmatrix} \overset{c_3-c_2}{=\!=} (x_2-x_1)(x_3-x_1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_1 & 1 & 0 \\ x_1^2 & x_2+x_1 & x_3-x_2 \end{vmatrix}$$

$$= (x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2)$$

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

(2) $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$ 四阶范德蒙

$=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$

(3). $D=\begin{vmatrix} b+c & a+c & a+b \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \overset{r_1+r_2}{=\!=} \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

$=(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}=(a+b+c)(b-a)(c-a)(c-b)$

4. 爪型行列式的计算.

(1). 计算 $D=\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a_2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a_3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$ (其中 $a_i\neq 0$, $i=1,2,3,4$)

"爪"型行列式计算方法 ①将主对角线第2~n个元素化为1.(提公因子)

②再将"1..."化为三角形行列式

$D=a_2a_3a_4\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{a_2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{a_3} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{a_4} & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{r_1-r_j}{\underset{j=2,3,4}{=\!=}} a_2a_3a_4\begin{vmatrix} a_1-\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{a_2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{a_3} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{a_4} & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$=a_2a_3a_4\left(a_1-\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_4}\right)$

(2) 计算 $D=\begin{vmatrix} a_1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & a_2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a_3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$ (其中 $a_i\neq 0$. $i=1,2,3,4$)

$D=a_2a_3a_4\begin{vmatrix} a_1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{a_2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{a_3} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{a_4} & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{r_1-r_j}{\underset{j=2,3,4}{=\!=}} a_2a_3a_4\begin{vmatrix} a_1-\frac{2}{a_2}-\frac{3}{a_3}-\frac{4}{a_4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{a_2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{a_3} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{a_4} & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$=a_2a_3a_4\left(a_1-\frac{2}{a_2}-\frac{3}{a_3}-\frac{4}{a_4}\right)$

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

5. 余子式. 代数余子式

① 余子式：设 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，则元素 a_{ij} 的余子式为去掉 a_{ij} 所在的行与列所得到的行列式，记为 M_{ij}.

eg: $M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$ $M_{33}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

② 代数余子式，称 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为 a_{ij} 的代数余子式，记为 A_{ij}.

即 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

eg: $A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-M_{12}$ $A_{33}=(-1)^{3+3}M_{33}=M_{33}$

③ 行列式的展开定理.

$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}$, $i=1,2,3$

$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+a_{3j}A_{3j}$, $j=1,2,3$

行列式 = 某行(列)元素乘相应代数余子式再求和

eg: 求 (1) $D_3=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix}=2A_{21}+0A_{22}+0A_{23}=2(-1)^{2+1}M_{21}$

$=-2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

$=-2\times(8-9)$

$=2$.

(4) $D_3=\begin{vmatrix} 8 & 3 & 9 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}=3A_{12}+0A_{22}+0A_{32}=3(-1)^{1+2}M_{12}=-3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

$=-3(5-4)$

$=-3$

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

eg: 设 $D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$，求 $A_{31}+3A_{32}-2A_{33}+2A_{34}$

$A_{31}+3A_{32}-2A_{33}+2A_{34}=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}=24.$

求 $M_{31}+M_{32}+M_{33}+M_{34}=A_{31}-A_{32}+A_{33}-A_{34}=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -2 \end{vmatrix}$.

6. 利用拆和的方法计算行列式.

若 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=1$ $D_1=\begin{vmatrix} -2a_{11} & 2a_{11}-a_{12} & a_{13} \\ -2a_{21} & 2a_{21}-a_{22} & a_{23} \\ -2a_{31} & 2a_{31}-3a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$. 则 $D_1=$

① 当行列式的某一列(行)的元素为两数之和时，行列式可分解为两个行列式之和

$$\begin{vmatrix} a+b & e \\ c+d & f \end{vmatrix}=(a+b)A_{11}+(c+d)A_{21}=aA_{11}+bA_{11}+cA_{21}+dA_{21}$$
$$=(aA_{11}+cA_{21})+(bA_{11}+dA_{21})$$
$$=\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b & e \\ d & f \end{vmatrix}$$

② 当行列式的某两列(行)的元素成比例，则此行列式等于0

$$\begin{vmatrix} a & 2a \\ b & 2b \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix}=0$$

$$D_1=\begin{vmatrix} -2a_{11} & 2a_{11} & a_{13} \\ -2a_{21} & 2a_{21} & a_{23} \\ -2a_{31} & 2a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -2a_{11} & -a_{12} & a_{13} \\ -2a_{21} & -a_{22} & a_{23} \\ -2a_{31} & -a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=0+(-2)(-1)\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$=2\cdot 1=2.$$

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

7. 利用拉普拉斯公式计算行列式

一 常见公式 $D=\begin{vmatrix} \boxed{a_1 & a_2} & 0 & 0 \\ \boxed{a_3 & a_4} & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & \boxed{b_1 & b_2} \\ c_3 & c_4 & \underline{b_3 & b_4} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{vmatrix}$

eg: 求 (1) $D_1=\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 8 & 3 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}=(5-4)(16-15)=1$

(2) $D_2=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}\xrightarrow[c_2\leftrightarrow c_4]{c_1\leftrightarrow c_3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

$=(4-6)(3+1)$

$=-8$

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date . .

1. 矩阵的乘法.

设 $A_{2\times2}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}_{2\times2}$ $B_{2\times3}\begin{pmatrix}e&f&g\\h&m&n\end{pmatrix}_{2\times3}$

则 $A_{2\times2}\cdot B_{2\times3}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}_{2\times2}\begin{pmatrix}e&f&g\\h&m&n\end{pmatrix}_{2\times3}=\begin{pmatrix}ae+bh&af+bm&ag+bn\\ce+dh&cf+dm&cg+dn\end{pmatrix}_{2\times3}=C_{2\times3}$

① 矩阵相乘的合法性："内标相等"

② 矩阵相乘的结果："前行后列" 外标.

eg: 设 $A=\begin{pmatrix}4&-1&2&1\\1&1&0&3\\0&3&1&4\end{pmatrix}_{3\times4}$ $B=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\\3&0\\-1&2\end{pmatrix}_{4\times2}$ 求AB

记 $C_{3\times2}=A_{3\times4}\cdot B_{4\times2}=\begin{pmatrix}4&-1&2&1\\1&1&0&3\\0&3&1&4\end{pmatrix}_{3\times4}\begin{pmatrix}1&2\\0&1\\3&0\\-1&2\end{pmatrix}_{4\times2}=\begin{pmatrix}9&9\\-2&9\\-1&11\end{pmatrix}_{3\times2}$

$=\begin{pmatrix}4\times1+(-1)\cdot0+2\cdot3+1\cdot(-1)&4\cdot2+(-1)\cdot1+2\cdot0+1\cdot2\\1\cdot1+1\cdot0+0\cdot3+3\cdot(-1)&2\cdot1+1\cdot1+0\cdot0+3\cdot2\\0\cdot1+3\cdot0+1\cdot3+4\cdot(-1)&2\cdot0+1\cdot3+0\cdot1+2\cdot4\end{pmatrix}_{3\times2}$

eg: 设 $A_{1\times3}=(1,2,3)$ $B_{3\times1}=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$ 求 (1) AB (2) BA

(1) $A_{1\times3}\cdot B_{3\times1}=(1,2,3)\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}=(3+4+3)_{1\times1}=(10)_{1\times1}=10$

(2) 反之 $B_{3\times1}\cdot A_{1\times3}=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}(1,2,3)=\begin{pmatrix}3&6&9\\2&4&6\\1&2&3\end{pmatrix}_{3\times3}$

① 矩阵的乘法不具有交换律: $AB\neq BA$

② 矩阵的乘法满足分配律: $A(B+C)=AB+AC$

eg: $AB+A=A(B+E)$

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

Date

2. 抽象矩阵求逆矩阵.

eg: 设方阵 A 满足 $A^2-A-2E=0$. 求 $(A+2E)^{-1}$

对方阵 $A\cdot B$, 若 $AB=E$ (或 $BA=E$) $\Rightarrow$ 则称 A、B 互为逆矩阵. 记为 $A^{-1}=B$, $B^{-1}=A$

法1. 凑定义法. $(A+2E)\cdot\boxed{?}=E$

$\because A^2-A-2E=0 \Rightarrow A^2+2A-3A-2E=0$

$\Rightarrow (A+2E)A-3A-6E+6E-2E=0$

$\Rightarrow A(A+2E)-3(A+2E)+4E=0$

$=(A-3E)(A+2E)=-4E$

$\Rightarrow (A+2E)\cdot\underline{(-\frac{1}{4})(A-3E)}=E$

$\therefore (A+2E)^{-1}=-\frac{1}{4}(A-3E)$

法2: 长除法

$$
\begin{array}{r|l}
 & A-3E \\
\hline
A+2E & A^2-A-2E \\
 & A^2+2A \\
\hline
 & -3A-2E \\
 & -3A-6E \\
\hline
 & 4E
\end{array}
$$

$\therefore A^2-A-2E=(A+2E)(A-3E)+4E=0$

$\therefore$ 同法1

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

3. 数字型矩阵求逆

eg: 求 $A=\begin{pmatrix}3&2&1\\3&1&5\\3&2&3\end{pmatrix}$ 的逆矩阵 A^{-1}

利用行变换法求 A^{-1}: $(A|E)\xrightarrow{\text{初变换}}(E|A^{-1})$

$$(A|E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}3&2&1&1&0&0\\3&1&5&0&1&0\\3&2&3&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}3&2&1&1&0&0\\0&-1&4&-1&1&0\\0&0&2&-1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_1+2r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}3&0&9&-1&2&0\\0&-1&4&-1&1&0\\0&0&2&-1&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3\cdot(\frac{1}{2})\\r_1(\frac{1}{3})]{r_2\cdot(-1)}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&3&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&0\\0&1&-4&1&-1&0\\0&0&1&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{array}\right)\xrightarrow[r_2+4r_3]{r_1-3r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{7}{6}&\frac{2}{3}&-\frac{3}{2}\\0&1&0&-1&-1&2\\0&0&1&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

$$\therefore A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{7}{6}&\frac{2}{3}&-\frac{3}{2}\\-1&-1&2\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

eg: 求 $A=\begin{pmatrix}1&4\\-1&2\end{pmatrix}$ 的 A^{-1}

二阶阵阵 A^{-1} 的秒杀法："两调一除".

若 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$，且 $|A|\neq0$. $\Rightarrow$ 则 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$

法1 $A=\begin{pmatrix}1&4\\-1&2\end{pmatrix}\Rightarrow |A|=2-(-4)=6\neq0$.

$$A^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2&-4\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\-\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\end{pmatrix}$$

法2：行变换法. $(A|E)=\left(\begin{array}{cc|cc}1&4&1&0\\-1&2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_2+r_1}\left(\begin{array}{cc|cc}1&4&1&0\\0&6&1&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_1-\frac{2}{3}r_2]{\frac{1}{6}r_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\0&1&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\end{array}\right)$

$$\therefore A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\end{pmatrix}$$

方阵 A 可逆 $\Leftrightarrow |A|\neq0$

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

1. 求解矩阵方程.

① 若 $A\cdot X=B$ $\overset{A^{-1}存在}{\Rightarrow}$ 则 $X=A^{-1}B$

② 若 $X\cdot A=B$ $\overset{A^{-1}存在}{\Rightarrow}$ 则 $X=BA^{-1}$

③ 若 $A\cdot X\cdot B=C$ $\Rightarrow$ 则 $X=A^{-1}CB^{-1}$

eg: 解下列矩阵方程 $\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}_A X=\begin{pmatrix}4&-6\\2&1\end{pmatrix}_B$

若 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$ 、两调一除

设 $A=\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}$ $|A|=6-5=1\neq0$ $A^{-1}=\begin{pmatrix}3&-5\\-1&2\end{pmatrix}$

设 $B=\begin{pmatrix}4&-6\\2&1\end{pmatrix}$ 由 $A\cdot X=B$. 得 $X=A^{-1}B$

$=\begin{pmatrix}3&-5\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&-6\\2&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}2&-23\\0&8\end{pmatrix}$

eg: 解下列方程 $X\cdot\begin{pmatrix}2&1&-1\\2&1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}_A=\begin{pmatrix}1&-1&3\\4&3&2\end{pmatrix}_B$.

设 $A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\2&1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}$ $|A|=\begin{vmatrix}2&1&-1\\2&1&0\\1&-1&1\end{vmatrix}\overset{r_1+r_3}{=\!=}\begin{vmatrix}3&0&0\\2&1&0\\1&-1&1\end{vmatrix}=3\neq0$

$(A|E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&1&-1&1&0&0\\2&1&0&0&1&0\\1&-1&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3\leftrightarrow r_2]{r_1\leftrightarrow r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&1&0&0&1\\2&1&0&0&1&0\\2&1&0&1&0&0\end{array}\right)\xrightarrow[r_2-2r_1]{r_3-r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&1&0&0&1\\0&3&-3&0&1&-2\\0&0&1&1&0&-1\end{array}\right)$

$\xrightarrow[r_1-r_3]{r_2+3r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&1&-1&1\\0&3&0&-2&3&-2\\0&0&1&-1&1&0\end{array}\right)\xrightarrow[r_2\times\frac{1}{3}]{r_1+\frac{1}{3}r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}\\0&1&0&-\frac{2}{3}&1&-\frac{2}{3}\\0&0&1&-1&1&0\end{array}\right)$

$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}&1&-\frac{2}{3}\\-1&1&0\end{pmatrix}$ $\because X\cdot A^{-1}=B\Rightarrow X=BA^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&3\\4&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}&1&-\frac{2}{3}\\-1&1&0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-2&2&1\\-\frac{8}{3}&5&-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date . .

eg: 设矩阵 X 满足 $A^*X = A^{-1}B + 2X$. 其中 $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\\0&0\end{pmatrix}$

求矩阵 X

A^* 称为 A 的伴随矩阵. 且 $A\cdot A^* = A^*A = |A|\cdot E$. $A^* = |A|\cdot A^{-1}$

$\because A^*\cdot X = A^{-1}B + 2X \Longrightarrow A\cdot A^*X = AA^{-1}B + 2AX$

$\Longrightarrow |A|\cdot X = B + 2AX$

$\Rightarrow 4X = B + 2AX \Rightarrow (4E-2A)X = B$

$|A| = 1+|-1|-(-1-1-1) = 4$

$\Rightarrow X = (4E-2A)^{-1}B$

$(4E-2A) = \begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2&2&-2\\-2&2&2\\2&-2&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&-2&2\\2&2&-2\\-2&2&2\end{pmatrix}$

$(4E-2A)^{-1} = \begin{pmatrix}\frac14&\frac14&0\\0&\frac14&\frac14\\\frac14&0&\frac14\end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix}\frac14&\frac14&0\\0&\frac14&\frac14\\\frac14&0&\frac14\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&0\\0&0\end{pmatrix} = \frac14\begin{pmatrix}2&1\\1&-1\\1&0\end{pmatrix}$

n 方阵的行列式.

常见公式: $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$. $|A^T| = |A|$ $|kA_{n\times n}| = k^n|A|$ $|A^*_{n\times n}| = |A|^{n-1}$

$A^{-1}A = E$

$|A^{-1}||A| = |E| = 1$

$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

常见错误: $|A+B| \neq |A|+|B|$

eg: 设 $A_{3\times3}$. $|A| = \frac12$. 求 $|(3A)^{-1} - 2A^*|$

$A^* = |A|\cdot A^{-1} = \frac12 A^{-1} \Rightarrow 2A^* = A^{-1}$

$|(3A^{-1}) - 2A^*| = |\frac13 A^{-1} - A^{-1}| = |-\frac23 A^{-1}_{3\times3}| = (-\frac23)^3|A^{-1}| = \frac{-8}{27}\cdot\frac{1}{|A|} = \frac{-16}{27}$

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

Date

5. 矩阵的秩

eg: 设 $A=\begin{pmatrix}3&1&0&2\\1&-1&2&-1\\1&3&-4&4\end{pmatrix}_{3\times4}$，求 $r(A)$.

① 行阶梯形的特点：矩阵中每一行的首个非0元素所在的列比下一行的首个非0元素所在的列都靠前。 eg: $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&2&1&4\end{pmatrix}$ ✗

$A\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

② 利用行初等变换法化 A 为阶梯形 B，$r(A)=B$ 中非0行的行数

$$A=\begin{pmatrix}3&1&0&2\\1&-1&2&-1\\1&3&-4&4\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1&-1&2&-1\\3&1&0&2\\1&3&-4&4\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-3r_1}\begin{pmatrix}1&-1&2&-1\\0&4&-6&5\\0&4&-6&5\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&-1&2&-1\\0&4&-6&5\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$r(A)=2$

eg: 设 $A=\begin{pmatrix}1&-2&3k\\-1&2k&-3\\k&-2&3\end{pmatrix}$. 问 k 为何值时，可使 (1) $r(A)=1$ (2) $r(A)=2$ (3) $r(A)=3$

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&3k\\-1&2k&-3\\k&-2&3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-kr_1]{r_2+r_1}\begin{pmatrix}1&-2&3k\\0&2(k-1)&3(k-1)\\0&2(k-1)&-3(k^2-1)\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&-2&3k\\0&2(k-1)&3(k-1)\\0&0&-3(k-1)(k+2)\end{pmatrix}$$

$k-1=0$.

① 若 $r(A)=1$. $k=1$

② 若 $r(A)=2$ $k+2=0$, $k=-2$.

③ 若 $r(A)=3$. $(k-1)\neq0$, $k+2\neq0$ $\therefore k\neq1$, $k\neq-2$.

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

1. 判别向量组的线性相关性(数字型).

eg: 求下列向量组的相关性.

(1) $\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ $\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ (2) $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ $\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\2\\-5\end{pmatrix}$ $\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$

① 两个向量 α_1 与 α_2 相关 $\Leftrightarrow$ α_1 与 α_2 对应成比例 $\xLeftrightarrow{\text{判}}$ $|\alpha_1,\alpha_2|=0$.

eg: $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ $\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$

② 多个向量 $\underbrace{\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m}_{m个}$ 相关(无关) $\begin{cases}\xLeftrightarrow{\text{判}} |\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m)=0 \ (\neq 0)\\ \xLeftrightarrow{\text{秩}} r(\alpha_1\cdots\alpha_m)<m \ (=m)\end{cases}$

(1) 法1. $\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ $\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ 不成比例 $\Rightarrow$ α_1,α_2 无关

法2 $|\alpha_1,\alpha_2|=\begin{vmatrix}2&-1\\5&3\end{vmatrix}=6-(-5)=11\neq 0 \Rightarrow \alpha_1,\alpha_2$ 无关.

法3: $(\alpha_1,\alpha_2)=\begin{pmatrix}2&-1\\5&3\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-\frac{5}{2}r_1}\begin{pmatrix}2&-1\\0&\frac{11}{2}\end{pmatrix}$ $\Rightarrow r(\alpha_1,\alpha_2)=2$. $\Rightarrow$ 无关.

(2) 法1. $|\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3|=\begin{vmatrix}1&0&-1\\-2&2&0\\3&-5&2\end{vmatrix}\xlongequal{3+4}\begin{vmatrix}1&0&0\\-2&2&-2\\3&-5&5\end{vmatrix}=0 \Rightarrow \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 相关

法2: $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-2&2&0\\3&-5&2\end{pmatrix}\begin{matrix}r_2+2r_1\\ \Rightarrow\\ r_3-3r_1\end{matrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&2&-2\\0&-5&5\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&2&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$

$r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)=2<3$

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

Date

eg: 设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}b\\a+1\\3\end{pmatrix}$ $\alpha_2=\begin{pmatrix}a\\2\\-2\end{pmatrix}$ $\alpha_3=\begin{pmatrix}a\\1\\0\end{pmatrix}$

(1) 问 $a=$? 时, α_1,α_2 相关 (2) $a=$? 时, $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ 无关.

(1) α_1 与 α_2 相关 $\Rightarrow$ α_1 与 α_2 对应成比例

$$\frac{b}{a}=\frac{a+1}{2}=\frac{3}{-2}$$

$$a=-4$$

(2) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 无关 $\Rightarrow$ $|\alpha_1\alpha_2\alpha_3|\neq 0$.

$$\begin{vmatrix}b&a&a\\a+1&2&1\\3&-2&0\end{vmatrix}\xrightarrow{r_1-ar_2}\begin{vmatrix}-a^2-a+b&-a&0\\a+1&2&1\\3&-2&0\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}-a^2-a+b&-a\\3&-2\end{vmatrix}$$

$$=-(2a-3)(a+4)$$

$\therefore a\neq\frac{3}{2}$ 且 $a\neq -4$

判别向量组的线性相关性 (抽象型)

eg: 设 $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ 线性无关, 问抽象向量组 $\alpha_1-\alpha_2$, $\alpha_2-\alpha_3$, $\alpha_3-2\alpha_1$ 的相关性?

① 抽象向量组的表示方法. $(\alpha_1\ \alpha_2)\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=(\alpha_1+3\alpha_2,\ 2\alpha_1+4\alpha_2)$

$\Rightarrow$ 逆向思维 $(\alpha_1+3\alpha_2;\ 2\alpha_1+4\alpha_2)=(\alpha_1,\alpha_2)\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ 类似 $(\alpha_1-\alpha_2,\ 2\alpha_2-\alpha_3,\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2\ \alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&2&1\\0&-1&1\end{pmatrix}$

② 若 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\cdot C$ 且 $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ 无关.

则 当 $|C|\overset{\text{无关}}{=}0\ (\neq 0)\Leftrightarrow\beta_1\beta_2\beta_3$ 相关 (无关)

{ 无关组 · 可逆阵 $\Rightarrow$ 无关
{ 无关组 · 不可逆阵 $\Rightarrow$ 相关.

Campus
扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

$(\alpha_1-\alpha_2,\ \alpha_2-\alpha_3,\ \alpha_3-2\alpha_1)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&-2\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$ 记C

无关

$|C|=\begin{vmatrix}1&0&-2\\-1&1&0\\0&-1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&-2\\0&1&-2\\0&-1&1\end{vmatrix}=-1\neq 0$. $\Rightarrow$ C可逆 $\Rightarrow$ 无关组-可逆阵 $\Rightarrow$ 无关

3. 求向量组的秩与极大无关项.

eg: 设$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix}$ $\alpha_2=\begin{pmatrix}4\\-1\\-5\\-6\end{pmatrix}$ $\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\-3\\-4\\-7\end{pmatrix}$, 求$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的秩与一个极大无关组

① $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ = 矩阵$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$的所梯形中非0行数

② $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的极大无关组一般取所梯形中拐弯处所在的列向量

$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&4&-1\\2&-1&-3\\1&-5&-4\\3&-6&-7\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&4&-1\\0&-9&-5\\0&-9&-5\\0&-18&-10\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&4&-1\\0&-9&-5\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$.

则$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的极大无关组含有两个向量. 即取 α_1,α_2. 即可

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

Date

1. 齐次方程组 $A\cdot x=0$ 的求解.

eg: 求方程组 $\begin{cases} x_1+x_2-3x_4-x_5=0 \\ x_1-x_2+2x_3-x_4+x_5=0 \\ 4x_1-2x_2+6x_3-5x_4+x_5=0 \\ 2x_1+4x_2-2x_3+4x_4-16x_5=0 \end{cases}$ 的基础解系、及通解.

① $A_{m\times n}\cdot x=0$ $\begin{cases} \text{若 } r(A_{m\times n})=n \Leftrightarrow Ax=0 \text{ 只有零解 (唯一解)} \\ \text{若 } r(A_{m\times n})<n \Leftrightarrow Ax=0 \text{ 有非零解 (无穷解)} \end{cases}$

② 基础解系: 当 $Ax=0$ 有无穷解时, 解集的极大的无关组称为基础解系.

基础解系所含解向量个数 $=n-r(A)$ 个

③ 基础解系求法: 把系数阵化为行最简形, 如 $A\to\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&1&3&4\\0&0&0&0\end{pmatrix}_{3\times4}$ (非拐角处变量作为自由变量: x_3, x_4)

$\Rightarrow$ 基础解系有 $n-r(A)=2$ 个向量. 记 $\xi_1=\begin{pmatrix}-2\\-3\\1\\0\end{pmatrix}$ $\xi_2=\begin{pmatrix}1\\-4\\0\\1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ 通解 $x=k_1\xi_1+k_2\xi_2$. k_1,k_2 为任意常数.

$A_{4\times5}=\begin{pmatrix}1&1&0&-3&-1\\1&-1&2&-1&1\\4&-2&6&-5&1\\2&4&-2&4&-16\end{pmatrix}_{4\times5}$ 行变换 $\begin{pmatrix}1&0&1&0&-2\\0&1&-1&0&-2\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}_{4\times5}$ (x_3, x_5) $\Rightarrow r(A)=3<5\Rightarrow$ 有无穷解.

$\Rightarrow$ 基础解系含 $n-r(A)=2$ 个向量 $\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\xi_2=\begin{pmatrix}2\\2\\0\\1\\1\end{pmatrix}$

通解为 $x=k_1\xi_1+k_2\xi_2$, k_1,k_2 为任意常数.

Campus

CS 扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

2. 非齐次方程组的求解.

eg: 求方程组 $\begin{cases} 2x_1+7x_2+3x_3+x_4=6 \\ 3x_1+5x_2+2x_3+2x_4=4 \\ 9x_1+4x_2+x_3+7x_4=2 \end{cases}$ 的通解.

① $A_{m\times n}\cdot x=b$ $\begin{cases} \text{若 } r(A)=r(A|b) \begin{cases} <n \Rightarrow Ax=b \text{ 有无穷解.} \\ =n \Rightarrow Ax=b \text{ 有唯一解.} \end{cases} \\ \text{若 } r(A)\neq r(A|b) \Rightarrow Ax=b \text{ 无解} \end{cases}$

② 非齐通 = 齐通 + 非齐特.

③ 例如 $A_{2\times 4}x=b$ 的增广阵 $(A|b)$ 行最简, $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right)$ (x_3 放 x_4 放) $\Rightarrow r(A)=2=r(A|b)<4$

1°. $Ax=0$ 的基础解系. $\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\-3\\1\\0\end{pmatrix}$ $\xi_2=\begin{pmatrix}-2\\-4\\0\\1\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ 齐通 $=k_1\xi_1+k_2\xi_2$.

2°. $Ax=b$ 的特解. $\eta=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}$ 2) $Ax=b$ 通解为 $x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\eta$

$(A|b)_{3\times 4}=\begin{pmatrix}2&7&3&1&6\\3&5&2&2&4\\9&4&1&7&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{pmatrix}-1&2&1&-1&2\\3&5&2&2&4\\9&4&1&7&2\end{pmatrix}\longrightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&-\frac{1}{11}&\frac{9}{11}&-\frac{1}{11}\\0&1&\frac{5}{11}&-\frac{1}{11}&\frac{10}{11}\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$ (x_3 放 x_4 放)

$\Rightarrow r(A_{3\times 4})=2=r(A|b)<4 \Rightarrow Ax=b$ 有无穷解.

1°非齐方程 $Ax=0$ 的基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{11}\\-\frac{5}{11}\\1\\0\end{pmatrix}$ $\xi_2=\begin{pmatrix}-\frac{9}{11}\\\frac{1}{11}\\0\\1\end{pmatrix}$

2°非齐方程 $Ax=b$ 的特解 $\eta=\begin{pmatrix}\frac{1}{11}\\\frac{10}{11}\\0\\0\end{pmatrix}$ 故通解 $x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\eta$

其中 k_1,k_2 为任意常数

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

3. 带参数方程组的求解.

eg: 设 $A_{3\times3}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}$ $b=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$ 已知 $Ax=b$ 存在两个不同解

(1) 求 λ, a. (2) 求 $Ax=b$ 通解

$Ax=b$ 有两个不同解 $\alpha_1, \alpha_2 \Rightarrow Ax=b$ 有无穷解.

$\because Ax=b$ 有无穷解. $\Rightarrow r(A_{3\times3})=r(A|b)<3$.

$(A|b)=\left(\begin{array}{ccc|c}\lambda & 1 & 1 & a\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & \lambda & 1\end{array}\right) \xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & \lambda & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1\\ \lambda & 1 & 1 & a\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & \lambda & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 & a-\lambda+1\end{array}\right)$

要使 $r(A)=r(A|b)<3 \Rightarrow \begin{cases}\lambda-1\neq0\\ 1-\lambda^2=0 \text{ 且 } a-\lambda+1=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\lambda=-1\\ a=-2\end{cases}$

(2) $(A|b)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & \frac{3}{2}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$ (x_3) $\Rightarrow r(A)=2=r(A|b)<3$

$\Rightarrow$ 基础解系有 $3-r(A)=1$ 个向量, $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ 非齐特解 $\eta=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$

Campus

CS 扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

1. 特征值与特征向量的求法（数字型）

eg：求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\\3&3&6\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量

① 求A的特征值的方法：由 $|\lambda E-A|=0$，解得 λ 即为A的特征值。

② 求A的对应于 λ_0 的特征向量的方法，方程组 $(\lambda_0 E-A)x=0$ 的基础解系

特征方程

1. $|\lambda E-A|=0$.

$$\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-3\\-2&\lambda-1&-3\\-3&-3&\lambda-6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda+1&-\lambda-1&0\\-2&\lambda-1&-3\\-3&-3&\lambda-6\end{vmatrix}\overset{c_2+c_1}{=\!=}\begin{vmatrix}\lambda+1&0&0\\-2&\lambda-3&-3\\-3&-6&\lambda-6\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+1)\begin{vmatrix}\lambda-3&-3\\-6&\lambda-6\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+1)(\lambda-9)\lambda=0$$

$$\lambda_1=-1,\ \lambda_2=9,\ \lambda_3=0$$

2. ① 当 $\lambda_1=-1$ 时，由齐次方程组 $(\lambda_1 E-A)\cdot x=0$ 得

$$(\lambda_1 E-A)=(-E-A)=\begin{pmatrix}-2&-2&-3\\-2&-2&-3\\-3&-3&-7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow r(\lambda_1 E-A)=2<3.$$

（x_2）

$\Rightarrow$ 基础解系有 $3-2=1$ 个向量 $\xi=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ 对应于 $\lambda_1=-1$ 的特征向量为 $k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，$k_1\in$ 日常数 $\neq 0$.

② 当 $\lambda_2=9$ 时，由 $(\lambda_2 E-A)\cdot x=0$ 得

（x_3）

$$(\lambda_2 E-A)=(9E-A)=\begin{pmatrix}8&-2&-3\\-2&8&-3\\-3&-3&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{2}\\0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&0\end{pmatrix}$$ 由 $r(9E-A)=2<3$.

基础解系有 $3-2=1$ 个向量. $\xi_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$

对应 $\lambda_2=9$ 的特征向量为 $k_2\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$，$k_2\in$ 日常数 $\neq 0$

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

Date . .

③ 当$\lambda_3=0$时，由$(\lambda_3 E-A)x=0$得：

$(\lambda_3 E-A)=-A=\begin{pmatrix}-1&-2&-3\\-2&-1&-3\\-3&-3&-6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ $r(0E-A)=2<3$

基础解系含有$3-2=1$个向量 $\xi_3=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$

对应$\lambda_3=0$的特征向量为$k_3\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$，$k_3\in$日常.扣

2. 特征值与特征向量的求法.（抽象型）

eg：已知三阶矩阵A的特征值为1，-1，2，

求(1) $B=A^3-5A^2$的特征值 (2)求$|B|$

关于A的若干性质 ① 设A的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ $\Rightarrow|A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3$

A的迹 $tr(A)=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$

② 若λ为A的特征值，α为对应于λ的特征向量，则：$A\alpha=\lambda\alpha(\alpha\neq0)$

	A	A^2	$A^3+5A-6E$	A^{-1}	A^*	A^T	$B=P^{-1}AP$（相似）
特征值	λ	λ^2	$\lambda^3+5\lambda-6$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{\lvert A\rvert}{\lambda}$	λ	λ
特征向量	α	α	α	α	α	不确定	$P^{-1}\alpha$

(1) $B=A^3-5A^2=\lambda^3-5\lambda^2=-4;-6;-12$

(2) $|B|=B$的特征值之积$=(-4)(-6)(-12)=-288$

3. 矩阵的相似对角化

eg：设$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&-2&2\\-1&1&-1\end{pmatrix}$，求一个可逆阵P，使得$P^{-1}AP=\Lambda$（其中$\Lambda$为对角阵）

① 若P可逆，使$P^{-1}AP=\Lambda\Rightarrow$称A可相似对角化

② 把矩阵A对角化的步骤：1° 求A特征值$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$

2° 求A的特征向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$

3° 令$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，则$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\\0&0\end{pmatrix}$

Campus
扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

1° 由 $|\lambda E - A| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 & -1 \\ -2 & \lambda+2 & -2 \\ 1 & -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \lambda \\ -2 & \lambda+2 & -2 \\ 1 & -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ -2 & \lambda+2 & 0 \\ 1 & -1 & \lambda \end{vmatrix}$

$= \lambda^2(\lambda+2) = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -2$

2° ① 当 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ 时，由 $(0E - A)X = 0$ 得

$(0E - A) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r(0E - A) = 1 < 3$ （x_2 x_3）

$\Rightarrow$ 基础解系即特征向量为 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

② 当 $\lambda_3 = -2$ 时，由 $(-2E - A)X = 0$ 得，$(-2E - A) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

3° 令 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 可使 $P^{-1}AP = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$

eg: 设 $A = \begin{pmatrix} 17 & -2 & -2 \\ -2 & 14 & -4 \\ -2 & -4 & 14 \end{pmatrix}$，求一个正交阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ = \Lambda$（其中 Λ 为对角阵）

① 若 $A^T = A$，$\Rightarrow$ 则一定存在正交阵 Q $\xrightarrow{Q^{-1} = Q^T}$，使 $Q^{-1}AQ = \Lambda$

② 把对称阵 A 对角化的步骤 1° 求 A 特征值 λ_1 λ_2 λ_3

2° 求 A 特征向量 α_1, α_2 α_3

3°. 把 α_1, α_2 α_3 中不正交的向量正交化

若 α_1 α_2 不正交，则令施密特正交化 $\begin{cases} \beta_1 = \alpha_1 \\ \beta_2 = \alpha_2 - \dfrac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 \end{cases}$

4° 单位化所有特征向量得 ξ_1, ξ_2 ξ_3

5° 令 $Q = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$，则 $Q^{-1}AQ = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

Date

① 由 $|\lambda E-A|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda-17 & 2 & 2 \\ 2 & \lambda-14 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda-14 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow (\lambda-18)^2(\lambda-9)=0$

$\lambda_1=\lambda_2=18,\ \lambda_3=9.$

② 当 $\lambda_1=\lambda_2=18$ 时，由 $(18E-A)x=0$ 得基础解系即特征向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$ $\alpha_2=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$

当 $\lambda_3=9$ 时，由 $(9E-A)x=0$ 得 $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\alpha_1^T\alpha_2=(\alpha_1,\alpha_2)=4$ 不正交

$\alpha_1^T\alpha_3=-1+1=0$ 正交

$\alpha_2^T\alpha_3=-1+1=0$ 正交

③ 把 $\alpha_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$ $\alpha_2\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$ 正交化.

令 $\beta_1=\alpha_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$ $\beta_2=\alpha_2-\dfrac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}-\dfrac{+4}{5}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{5}\\-\frac{4}{5}\\1\end{pmatrix}$

$(\beta_1,\beta_1)=\beta_1^T\beta_1=+4+1=5$

$(\beta_1,\beta_2)=\beta_1^T\beta_2=\frac{4}{5}-\frac{4}{5}=0$

④ 把 β_1,β_2,α_3 单位化，令 $\xi_1=\dfrac{\beta_1}{|\beta_1|}=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$

$\xi_2=\dfrac{1}{\sqrt{45}}\begin{pmatrix}-2\\-4\\5\end{pmatrix}$ $\xi_3=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$

⑤ 令 $Q=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}\frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{45}} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-4}{\sqrt{45}} & \frac{2}{3}\\ 0 & \frac{5}{\sqrt{45}} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$ 可使 $Q^{-1}AQ=\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18 & & \\ & 18 & \\ & & 9\end{pmatrix}$

$\Downarrow$

Q^TAQ

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

1. 二次型的矩阵表示

eg: 把下列二次型的矩阵写出来

(1) $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 - x_2^2 + 6x_1x_2$

(2) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 3x_2x_3$

$2x_1x_2 = x_1x_2 + x_2x_1$ ↑

$-3x_2x_3 = -\frac{3}{2}x_2x_3 - \frac{3}{2}x_3x_2$ ↑

$2x_1x_3 = x_1x_3 + x_3x_1$ ↓

1 3 -1

二次型的矩阵三要素 1° $A^T = A$ 对称

2° A的主对角元素为平方项系数

3° A的其他元素为交叉项系数的一半

(1) $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 - x_2^2 + 6x_1x_2 = \underbrace{(x_1, x_2)}_{X^T}\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{X} = X^TAX \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

$= 2x_1^2 - x_2^2 + 3x_1x_2 + 3x_1x_2$

$= (2x_1 + 3x_2)x_1 + (3x_1 - x_2)x_2$

(2) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -\frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = X^TAX \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -\frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}$

eg: 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + cx_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3$ 的秩为2. 求c

$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & c \end{pmatrix}$ $\because r(f) = 2 \Rightarrow \therefore r(A) = 2.$

$A \to \begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 0 & 24 & -12 \\ 0 & 12 & c-9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 12 & c-9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & c-3 \end{pmatrix}$

要使 $r(A) = 2$ $\therefore c - 3 = 0$

$\therefore c = 3.$

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

2. 化二次型为标准形

eg: 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 + 2x_1x_3$

(1) 利用配方法化 f 为标准形　(2) 利用正交变化法化 f 为标准形

(1) 关于配方法 $\begin{cases} a^2+2ab = a^2+2ab+b^2-b^2 = (a+b)^2-b^2 \\ a^2+ab = a^2+2a\cdot\frac{b}{2}+(\frac{b}{2})^2-(\frac{b}{2})^2 = (a+\frac{b}{2})^2-\frac{1}{4}b^2 \end{cases}$

(1) 配方法 1° 先配所有含 x_1 的项

$f = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_2x_3$

$= 2[x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_3] + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_2x_3$

$= 2\left[x_1^2 + x_1(x_2+x_3) + \left(\frac{x_2+x_3}{2}\right)^2\right] - 2\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right)^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_2x_3$

$= 2\left(x_1 + \frac{x_2+x_3}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}x_2^2 + \frac{3}{2}x_3^2 - 3x_2x_3$

2° 再配所有含 x_2 的项.

$f = 2\left[x_1 + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{2}\right]^2 + \frac{3}{2}(x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2) + \frac{3}{2}x_3^2 - \frac{6}{2}x_3^2$

$= 2\left[x_1 + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{2}\right]^2 + \frac{3}{2}(x_2-x_3)^2 + 0x_3^2$

3° 当所有项都为完全平方项时, 换元. 令 $\begin{cases} y_1 = x_1 + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{2} \\ y_2 = x_2 - x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$

得 $f = 2y_1^2 + \frac{3}{2}y_2^2 + 0y_3^2$ 为标准形

$= 2y_1^2 + \frac{3}{2}y_2^2 +$

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

(2) 正交变换法：1° 写出 f 的矩阵 A

2° 求 A 的特征值 $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$

3° 求 A 的特征向量 $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$

4° 把 $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$ 中不正交的向量施密特正交化

5° 把以上所有向量单位化为 $\xi_1\ \xi_2\ \xi_3$，记 $Q=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ 为正交矩阵

6° 作变换：令 $x=Qy$，可使 $f=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\lambda_3 y_3^2$ 标准形

正交法：1° $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}$

2°. 由 $|\lambda E-A|=0$ $\Rightarrow$ $\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&-1\\-1&\lambda-2&1\\-1&1&\lambda-2\end{vmatrix}$ $\xrightarrow{r_1+r_3}$ $\begin{vmatrix}\lambda-3&0&\lambda-3\\-1&\lambda-2&1\\-1&1&\lambda-2\end{vmatrix}$

$=(\lambda-3)^2\lambda=0$.

$\lambda_1=\lambda_2=3\quad\lambda_3=0$.

3°. 当 $\lambda_1=\lambda_2=3$ 时. 由 $(3E-A)\to\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ （x_2 x_3）

$3-1=2$ 个. $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

当 $\lambda_3=0$ 时 由 $(0E-A)\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$ $\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

4°. $(\alpha_1,\alpha_2)=1\neq0$. 不正交. $(\alpha_1,\alpha_3)=0$ $(\alpha_2,\alpha_3)=0$ 正交.

令 $\beta_1=\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$

5°. 令 $\xi_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\xi_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ $\xi_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

6°. 令 $Q=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$. 当 $x=Qy$ 时 $f=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\lambda_3 y_3^2=3y_1^2+3y_2^2$

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

Date

3. 正定二次型、正交矩阵.

eg: 若二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + (a+1)x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_3$ 正定，求 a 应满足的条件

二次型 f 正定（即矩阵 A 正定）的判定方法

法1° A 的特征值全大于 0（即 f 的正惯性指数 = 未知数个数）

法2° A 的各阶顺序主子式全大于 0

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a+1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

一阶顺序主子式 $\Delta_1 = |1| = 1 > 0$

二阶顺序主子式 $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a+1 \end{vmatrix} = a+1$

三阶顺序主子式 $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a+1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = a+1-1 = a$

$\begin{cases} a+1>0 \to a>-1 \\ a>0 \end{cases}$

$\therefore a>0$

Campus

CS 扫描全能王 3亿人都在用的扫描App